

بِسْمِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

پانچ تمرین های فصل چهارم کتاب پژوهش عملیاتی دکتر مهرگان  
(تمارین فصل تفسیر اقتصادی)

نویسندگان: رضا محمدیان

امیر مزیکی

دانلود شده از

[www.Rasad-ATU.ir](http://www.Rasad-ATU.ir)

سایت انجمن علمی مدیریت صنعتی دانشگاه علامه طباطبائی

(۱) جداول سیمپلکس مسئله زیر را در قالب یک مسئله تولید تفسیر کنید.

متغیرهای اساسی	شماره سطر	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	R.H.S
Z	۰	۱	-۳	-۵	۰	۰	۰	۰
$S_1$	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۴
$S_2$	۲	۰	۰	۲	۰	۱	۰	۱۲
$S_3$	۳	۰	۳	۲	۰	۰	۰	۱۸
Z	۰	۱	-۳	۰	۰	$\frac{5}{2}$	۰	۳۰
$S_1$	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۴
$X_2$	۲	۰	۰	۱	۰	$-\frac{1}{2}$	۰	۶
$S_3$	۳	۰	۳	۰	۰	-۱	۱	۶
Z	۰	۱	۰	۰	۰	$-\frac{3}{2}$	۱	۳۶
$S_1$	۱	۰	۰	۰	۱	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	۲
$X_2$	۲	۰	۰	۱	۰	$-\frac{1}{2}$	۰	۶
$X_1$	۳	۰	۱	۰	۰	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	۲

همان گونه که می دانید اعداد در جداول سیمپلکس به صورت ستونی تفسیر می گردند پس :

**جدول اول:** اعداد زیر ستون  $X_1$ : برای تولید ۱ واحد محصول  $X_1$  می بایست ۱ واحد از منبع اول ( $S_1$ ) و ۰ واحد از منبع دوم ( $S_2$ ) و ۳ واحد از منبع سوم ( $S_3$ ) استفاده شود و این امر باعث افزایش سود به میزان ۳ واحد (عدد -۳ در سطر Z) می گردد.

اعداد زیر ستون  $X_2$ : برای تولید ۱ واحد محصول  $X_2$  می بایست ۰ واحد از منبع اول ( $S_1$ ) و ۲ واحد از منبع دوم ( $S_2$ ) و ۲ واحد از منبع سوم ( $S_3$ ) استفاده شود و این امر باعث افزایش سود به میزان ۵ واحد (عدد -۵ در سطر Z) می گردد.

**جدول دوم:** اعداد زیر ستون  $X_1$ : برای تولید ۱ واحد محصول  $X_1$  می بایست ۱ واحد از منبع اول و ۳ واحد از منبع سوم استفاده کرده و ۰ واحد از تولید  $X_2$  کاست که این فرآیند موجب افزایش سود به میزان ۳ واحد می گردد.

اعداد زیر ستون  $S_2$ : برای بدست آوردن یک واحد منبع دوم می بایست  $\frac{1}{2}$  از تولید محصول دوم کاست که این امر موجب افزایش ۱ واحدی در منبع سوم می گردد که این فرآیند موجب کاهش سود به میزان  $\frac{5}{2}$  می گردد.

**جدول سوم:** اعداد زیر ستون  $S_2$ : برای بدست آوردن ۱ واحد منبع دوم، می بایست  $\frac{1}{2}$  از تولید  $X_2$  کاسته و نیز  $\frac{1}{3}$  از  $S_1$  استفاده شود که این امر موجب افزایش  $\frac{1}{3}$  در تولید  $X_1$  می گردد و این فرآیند موجب کاهش سود به میزان  $\frac{3}{2}$  می گردد.

اعداد زیر ستون  $S_3$ : برای بدست آوردن یک واحد منبع سوم می بایست  $\frac{1}{3}$  از تولید  $X_1$  کم شود و این امر موجب افزایش  $\frac{1}{3}$  در منبع اول نیز می گردد که در کل باعث کاهش سود به میزان ۱ واحد می گردد.

۲) در مسئله ۱ قیمت های سایه را مشخص کنید. در صورتی که میزان منابع به ترتیب از ۴، ۱۲ و ۱۸ به ۵ و ۱۴ و ۱۸ افزایش یابد، در میزان سود (Z) چه تغییری حاصل می شود؟

✓ قیمت سایه محدودیت اول ۰، محدودیت دوم  $\frac{3}{4}$ ، محدودیت سوم ۱ می باشد.

	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	R.H.S
Z	۱	-۳	-۵	۰	۰	۰	۰
$S_1$	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۵
$S_2$	۰	۰	۲	۰	۱	۰	۱۴
$S_3$	۰	۳	۲	۰	۰	۱	۱۸
Z	۱	-۳	۰	۰	$\frac{5}{2}$	۰	۳۵
$S_1$	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۵
$X_2$	۰	۰	۱	۰	$-\frac{1}{2}$	۰	۷
$S_3$	۰	۳	۰	۰	-۱	۱	۴
Z	۱	۰	۰	۰	$\frac{3}{2}$	۱	۳۹
$S_1$	۰	۰	۰	۱	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{11}{3}$
$X_2$	۰	۰	۱	۰	$\frac{1}{2}$	۰	۷
$X_1$	۰	۱	۰	۰	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$

۳) جداول ابتدایی و یکی از تکرار های یک مسئله برنامه ریزی خطی در زیر داده شده است. با استفاده از مفهوم تفسیر اقتصادی سطر صفر جداول نهایی را بدست آورید.

متغیر های اساسی	شماره سطر	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	R.H.S
Z	۰	۱	-۳	-۱	-۵	-۴	۰	۰	۰	۰
	۱	۰	۳	-۳	۲	۸	۱	۰	۰	۵۰
	۲	۰	۵	-۶	-۴	-۴	۰	۱	۰	۴۰
	۳	۰	۴	-۲	۱	۳	۰	۰	۱	۲۰
Z	۰	۱								
	۱	۰	-۵	۱	۰	۲	۱	۰	-۲	۱۰
	۲	۰	۱۱	۰	۰	۱۲	۲	۱	۰	۱۴۰
	۳	۰	-۶	۰	۱	۷	۲	۰	-۳	۴۰

در صورتی که میزان منبع سوم از ۲۰ به ۲۱ تغییر یابد، چه تاثیری در مقدار  $Z$  می گذارد؟  
 ✓ با توجه به اینکه  $X_1$  و  $X_3$  و  $X_2$  یکه هستند پس در سطر  $Z$  مقدار صفر خواهند داشت.

ستون $X_1$	ستون $X_2$	ستون $X_3$	ستون $X_4$	ستون $X_5$	سود از دست رفته
$11 * 0 = 0$ <u>0</u>	$1 * 1 = 1$ $2 * 0 = 0$ $2 * 5 = 10$ <u>11</u>	$2 * 1 = 2$ $12 * 0 = 0$ $7 * 5 = 35$ <u>37</u>	$11 * 0 = 0$ <u>0</u>	$0 * 0 = 0$ <u>0</u>	
$5 * 1 = 5$ $6 * 5 = 30$ $1 * 3 = 3$ <u>38</u>	$1 * 0 = 0$ <u>0</u>	$1 * 4 = 4$ <u>4</u>	$2 * 1 = 2$ $3 * 5 = 15$ <u>17</u>	$0 - 17 = -17$	سود به دست آمده
$0 - 38 = -38$	$11 - 0 = 11$	$37 - 4 = 33$	$0 - 17 = -17$		جمع

$$Z^* = 10 * (3) + 14 * (0) + 4 * (5) = 210$$

(۴) ثانویه مسئله زیر را بنویسید.

Max $Z = 4X_1 + 2X_2 + 5X_3$	Max $Z = 4X_1 + 2X_2 + 5X_3$	مسئله ثانویه	Min $Y_1 = -2y_1 + 15y_2$
S.t. $X_1 + X_2 \geq 2$	$\Rightarrow -X_1 - X_2 \leq -2$	$\Rightarrow$	$-y_1 + y_2 \geq 4$
$X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 15$	$X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 15$		$-y_1 + 2y_2 \geq 2$
$X_1, X_2, X_3 \geq 0$			$3y_2 \geq 0$
			$y_1, y_2 \geq 0$

(۵) ثانویه مسئله زیر را بنویسید .

$$\text{Max } Z = 9X_1 + 12X_2 + 15X_3$$

$$\text{S.t. } 2X_1 + 2X_2 + X_3 = 10$$

$$2X_1 - 3X_2 + X_3 \geq 12$$

$$X_1 + X_2 - 5X_3 \leq 14$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

$$\text{Max } Z = 9X_1 + 12X_2 + 15X_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 10 \\ 2X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 10 \end{cases}$$

$$-2X_1 + 3X_2 - X_3 \leq -12$$

$$X_1 + X_2 - 5X_3 \leq 14$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

$$\text{Max } Z = 9X_1 + 12X_2 + 15X_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 10 \\ -2X_1 - 2X_2 - X_3 \leq -10 \end{cases}$$

$$-2X_1 + 3X_2 - X_3 \leq -12$$

$$X_1 + X_2 - 5X_3 \leq 14$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

$$\text{Min } Y = 10y_1 - 12y_2 + 14y_3$$

$$2y_1 - 2y_2 + y_3 \geq 9$$

$$2y_1 - 2y_2 + 3y_3 + y_4 \geq 12$$

$$y_1 - y_2 - 5y_3 \geq 15$$

$$y_1 = y'_1 - y''_1$$

$$\Rightarrow$$

$$\text{Min } Y = 10y_1 - 12y_2 + 14y_3$$

$$2y_1 - 2y_2 + y_3 \geq 9$$

$$2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 12$$

$$y_1 - y_2 - 5y_3 \geq 15$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0, \text{ آزاد در علامت } y_1$$

(۶) ثانویه مسئله زیر را بنویسید .

$$\text{Max } Z = 4X_1 + X_2 + 6X_3$$

$$\text{S.t. } X_1 + X_2 + X_3 = 10$$

$$5X_1 - X_2 + X_3 = 12$$

$$X_1 + 6X_2 - 3X_3 \leq 4$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

$$\text{Min } Y = 10y_1 + 12y_2 + 4y_3$$

$$y_1 + 5y_2 + y_3 \geq 4$$

$$y_1 - y_2 + 7y_3 \geq 1$$

$$y_1 + y_2 - 3y_3 \geq 6$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0, \text{ آزاد در علامت } y_2$$

(۷) ثانویه مسئله زیر را بنویسید .

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 2X_2$$

$$\text{S.t. } X_1 - 6X_2 \geq 2$$

$$5X_1 + 6X_2 = -4$$

$$X_1 \leq 0, X_2 \geq 0$$

$$X'_1 = -X_1$$

$$\Rightarrow$$

$$\text{Max } Z = -5X'_1 + 2X_2$$

$$-X'_1 - 6X_2 \geq 2$$

$$-5X'_1 + 6X_2 = -4$$

$$X'_1, X_2 \geq 0$$

$$\text{Max } Z = -5X'_1 + 2X_2$$

$$-X'_1 - 6X_2 \geq 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5X'_1 + 6X_2 \leq -4 \\ -5X'_1 + 6X_2 \geq -4 \end{cases}$$

$$X'_1, X_2 \geq 0$$

$$\text{Max } Z = -5X'_1 + 2X_2$$

$$+X'_1 + 6X_2 \leq -2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5X'_1 + 6X_2 \leq -4 \\ +5X'_1 - 6X_2 \leq +4 \end{cases}$$

$$X'_1, X_2 \geq 0$$

$$\text{Min } Y = -2y_1 - 4y_2 + 2y_3$$

$$\Rightarrow y_1 - 5y_2 + 5y_3 \geq -5$$

$$6y_1 + 7y_2 - 7y_3 \geq 2$$

$$y_2 = 5y'_2 + 5y''_2$$

$$\Rightarrow$$

$$\text{Min } Y = -2y_1 - 4y_2$$

$$y_1 - 5y_2 \geq -5$$

$$6y_1 + 7y_2 \geq 2$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \text{ آزاد در علامت}$$

(۸) ثانویه مسئله زیر را بنویسید.

$$\text{Min } Z = \varepsilon X_1 + 2X_2 - X_3$$

$$\text{Min } Z = \varepsilon X_1 + 2X_2 - X'_3 + X''_3$$

$$\text{Min } Z = \varepsilon X_1 + 2X_2 - X'_3 + X''_3$$

$$\text{S.t. } X_1 + X_2 + X_3 = 20 \quad X_3 = X'_3 - X''_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 + X_2 + X'_3 - X''_3 \geq 20 \\ X_1 + X_2 + X'_3 - X''_3 \leq 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 + X_2 + X'_3 - X''_3 \geq 20 \\ -X_1 - X_2 - X'_3 + X''_3 \geq -20 \end{cases}$$

$$2X_1 - X_2 \geq 6 \quad \Rightarrow$$

$$2X_1 - X_2 \geq 6$$

$$2X_1 - X_2 \geq 6$$

$$X_3 \leq \varepsilon$$

$$X'_3 - X''_3 \leq \varepsilon$$

$$-X'_3 + X''_3 \geq -\varepsilon$$

$X_1, X_2 \geq 0, X_3$  آزاد در علامت

$$\text{Max } Y = 20y_1 - 20y'_1 + 6y_2 - \varepsilon y_3$$

$$\text{Max } Y = 20y_1 + 6y_2 - \varepsilon y_3$$

$$\Rightarrow y'_1 - y''_1 + 2y_2 \leq \varepsilon$$

$$y_1 + 2y_2 \leq \varepsilon$$

$$y'_1 - y''_1 - y_2 \leq 2$$

$$y_1 = y'_1 - y''_1$$

$$y_1 - y_2 \leq 2$$

$$y'_1 - y''_1 - y_2 \leq -1$$

$$\Rightarrow$$

$$y_1 - y_2 = -1$$

$$-y'_1 + y''_1 + y_2 \leq +1$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0 \text{ و آزاد در علامت } y_1$$

(۹) ثانویه مسئله زیر را بنویسید.

$$\text{Max } Z = -5X_1 + 5X_2 + 13X_3$$

$$\text{Max } Z = -5X_1 + 5X_2 + 13X_3$$

$$\text{Min } Y = 20y_1 - 90y_2 + 50y_3$$

$$\text{S.t. } -X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 20$$

$$-X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 20$$

$$-y_1 - 12y_2 + \varepsilon y_3 \geq -5$$

$$12X_1 + \varepsilon X_2 + 10X_3 \geq 90 \quad \Rightarrow$$

$$-12X_1 - \varepsilon X_2 - 10X_3 \leq -90 \quad \Rightarrow$$

$$y_1 - \varepsilon y_2 + 2y_3 = 5$$

$$\varepsilon X_1 + 2X_2 - 3X_3 = 50$$

$$\varepsilon X_1 + 2X_2 - 3X_3 = 50$$

$$3y_1 - 10y_2 - 3y_3 \geq 13$$

$X_1, X_2 \geq 0, X_3$  آزاد در علامت

$y_1, y_2 \geq 0, y_3$  آزاد در علامت

(۱۰) مسئله زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Max } Z = 6X_1 + 8X_2$$

ثانویه

$$\text{Min } Y = 20y_1 + 10y_2$$

$$\text{S.t. } 5X_1 + 2X_2 \leq 20$$

 $\Rightarrow$ 

$$5y_1 + y_2 \geq 6$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 10$$

$$2y_1 + 2y_2 \geq 8$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

(الف) ثانویه این مسئله را بنویسید.

(ب) مسئله اولیه را به روش ترسیمی حل کنید و کلیه جواب های گوشه را مشخص کنید.

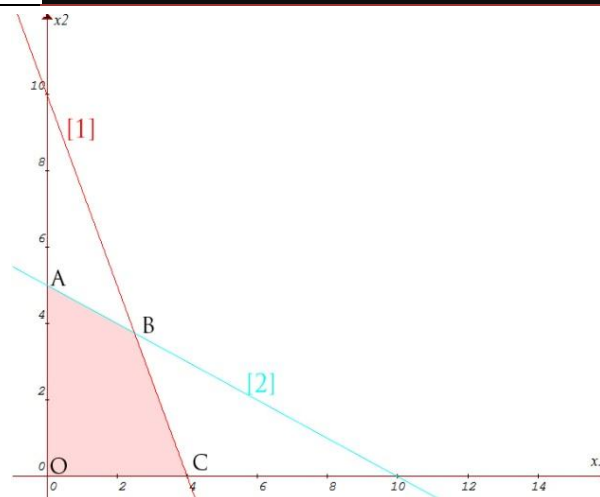
(ج) جواب های اساسی مکمل را برای مسئله ثانویه پیدا کنید.

(د) جواب بهینه را با توجه به اطلاعات فوق بیابید

(ه) با رسم مسئله ثانویه، ضمن نشان دادن ارتباط جواب های اساسی، مکمل این امر را که مسئله اولیه از مقادیر زیر بهینه و مسئله ثانویه از مقادیر فوق بهینه می رسند، بیان دارید.

$$\begin{array}{lcl}
 5X_1 + 2X_2 \leq 20 & \rightarrow & 5X_1 + 2X_2 = 20 \\
 X_1 + 2X_2 \leq 10 & \rightarrow & X_1 + 2X_2 = 10
 \end{array}$$

$X_1$	۰	۴
$X_2$	۱۰	۰
$X_1$	۰	۵
$X_2$	۱۰	۰



$$\begin{cases} [1] 5X_1 + 2X_2 = 20 \\ [2] X_1 + 2X_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5X_1 + 2X_2 = 20 \\ -X_1 - 2X_2 = -10 \end{cases}$$

$$4X_1 = 10 \Rightarrow X_1 = 2.5 \Rightarrow X_2 = 3.75$$

$$A(0, 0) \Rightarrow Z_A = 0, \quad B(2.5, 3.75) \Rightarrow Z_B^* = 45, \quad C(4, 0) \Rightarrow Z_C = 20$$

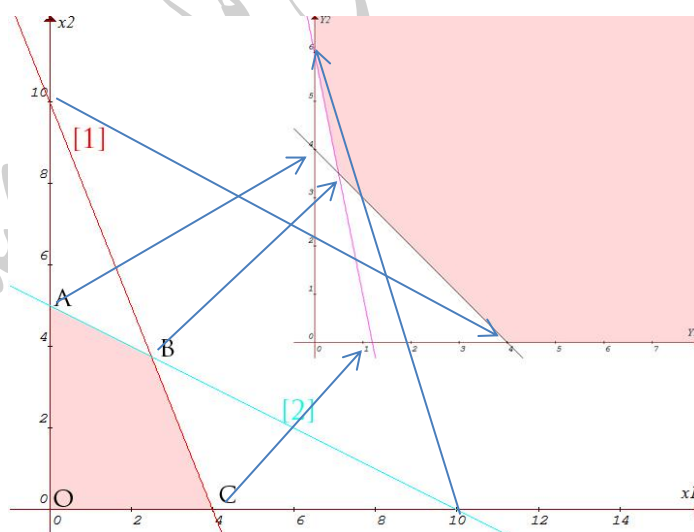
$$\text{تعداد نقاط گوشه ای} = \binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{m!.n!} = \frac{4!}{2!.2!} = 6$$

$$\text{Min } Y = 2y_1 + 1y_2$$

$$5y_1 + y_2 \geq 6 \rightarrow 5y_1 + y_2 = 6$$

$$2y_1 + 2y_2 \geq 8 \rightarrow 2y_1 + 2y_2 = 8$$

$y_1$	۰	۶.۵
$y_2$	۶	۰
$y_1$	۰	۴
$y_2$	۴	۰



مسئله اولیه						مسئله ثانویه					
ردیف	جواب اساسی				موجه؟	$Z=Y_0$	موجه؟	جواب اساسی			
	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$				$Y_1$	$Y_2$	$L_1$	$L_2$
۱	(۰	۰	۲۰	۱۰)	بله	۰	خیر	(۰	۰	-۶	-۸)
۲	(۰	۵	۱۰	۰)	بله	۴۰	خیر	(۰	۴	-۲	۰)
۳	(۴	۰	۰	۶)	بله	۲۴	خیر	( $\frac{7}{5}$	۰	۰	$-\frac{28}{5}$ )
۴	( $\frac{5}{2}$	$\frac{15}{4}$	۰	۰)	بله	۴۵	بله	( $\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	۰	۰)
۵	(۱۰	۰	-۳۰	۰)	خیر	۶۰	بله	(۰	۶	۰	۴)
۶	(۰	۱۰	۰	-۱۰)	خیر	۸۰	بله	(۴	۰	۱۴	۰)

۱۱) مسئله زیر را در نظر بگیرید.

الف) مسئله را به روش ترسیمی حل کنید و تمام جواب های اساسی را بدست آورید.

ب) ثانویه این مسئله را بنویسید و تعداد نقاط گوشه ای مسئله اولیه و ثانویه را محاسبه کنید.

ج) جواب های اساسی مکمل را بدست آورید

د) جواب بهینه را با توجه به اطلاعات فوق بدست آورید.

$$\text{Min } Y = 30y_1 + 40y_2$$

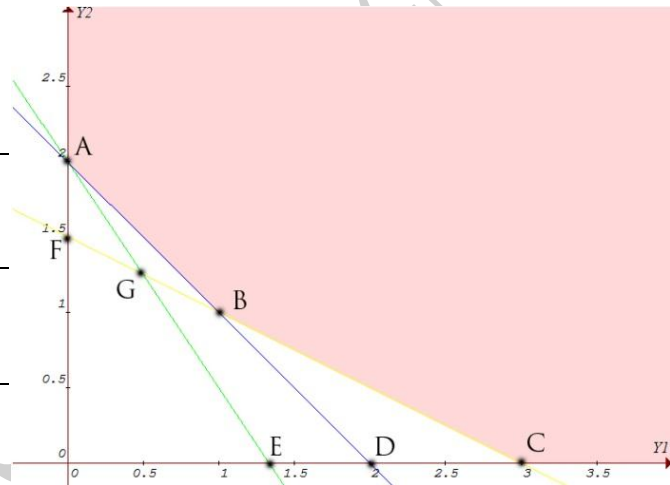
$$\text{S.t. } 3y_1 + 2y_2 \geq 4 \rightarrow 3y_1 + 2y_2 = 4$$

$$y_1 + 2y_2 \geq 3 \rightarrow y_1 + 2y_2 = 3$$

$$3y_1 + 3y_2 \geq 6 \rightarrow 3y_1 + 3y_2 = 6$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

$y_1$	0	$\frac{4}{3}$
$y_2$	2	0
$y_1$	0	3
$y_2$	$\frac{3}{2}$	0
$y_1$	0	2
$y_2$	2	0



$$\text{تعداد نقاط گوشه ای} = \binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{m!.n!} = \frac{5!}{3!.2!} = 10$$

اما چون نقطه A تباهیده است، ۸ نقطه گوشه ای داریم.

مسئله ثانویه

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2 + 6X_3$$

$$\Rightarrow 3X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 30$$

$$2X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 40$$

مسئله اوليه						مسئله ثانويه							
نقطه	جواب اساسی					موجه؟	Z=Y۰	موجه؟	جواب اساسی				
	y۱	y۲	L۱	L۲	L۳				X۱	X۲	X۳	s۱	s ۲
O	(۰	۰	-۴	-۳	-۶)	خير	۰	بله	(۰	۰	۰	۳۰	۴۰)
A	(۰	۲	۰	۱	۰)	بله	۸۰	خير	(				۰)
B	(۱	۱	۱	۰	۰)	بله	۷۰	بله	(۰	۱۰	$\frac{۲۰}{۳}$	۰	۰)
C	(۳	۰	۵	۰	۳)	بله	۹۰	خير	(۰	۳۰	۰	۰	-۲۰)
D	(۲	۰	۲	-۱	۰)	خير	۶۰	بله	(۰	۰	۱۰	۰	۱۰)
E	( $\frac{۴}{۳}$	۰	۰	$-\frac{۵}{۳}$	-۲)	خير	۴۰	بله	(۱۰	۰	۰	۰	۲۰)
F	(۰	$\frac{۳}{۲}$	-۱	۰	$-\frac{۳}{۲}$ )	خير	۶۰	بله	(۰	۲۰	۰	۱۰	۰)
G	( $\frac{۱}{۲}$	$\frac{۵}{۴}$	۰	۰	$\frac{۳}{۴}$ )	خير	۶۵	بله	(۵	۱۵	۰	۰	۰)



(۱۲) ثانویه مسئله زیر را بنویسید و بدون حل مسئله به روش سیمپلکس، مقدار تابع هدف را بیابید.

$$\text{Min} Z = 10X_1 + 4X_2 + 5X_3$$

$$\text{Max } Y_1 = 50y_1$$

S.t.

$$5y_1 \leq 10 \quad \rightarrow \quad y_1 \leq 2$$

$$5X_1 - 7X_2 + 3X_3 \geq 50 \quad \Rightarrow \quad -7y_1 \leq 4 \quad \rightarrow \quad y_1 \geq -\frac{4}{7}$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0 \quad \quad \quad 3y_1 \leq 5 \quad \rightarrow \quad y_1 \leq \frac{5}{3}$$

✓ با توجه به اینکه بیشترین مقدار  $Y_1$  که در تمام محدودیت ها صدق می کند  $y_1 = \frac{5}{3}$  است پس:  $\text{Max } Y_1 = 50y_1 = 50 * \frac{5}{3} = \frac{250}{3}$

(۱۳) با استفاده از مسئله ثانویه، جوابی را برای مجموعه نامساوی های زیر بیابید.

$$2X_1 + 3X_2 \leq 12$$

$$-3X_1 + 2X_2 \leq -4$$

$$3X_1 - 5X_2 \leq 2$$

$$X_1, X_2 \geq 0 \text{ آزاد در علامت}$$

(راهنمایی: تابع هدف را برای مسئله فوق انتخاب کنید.)

۱۴) مسئله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Min } Z = 2X_1 + 3X_2$$

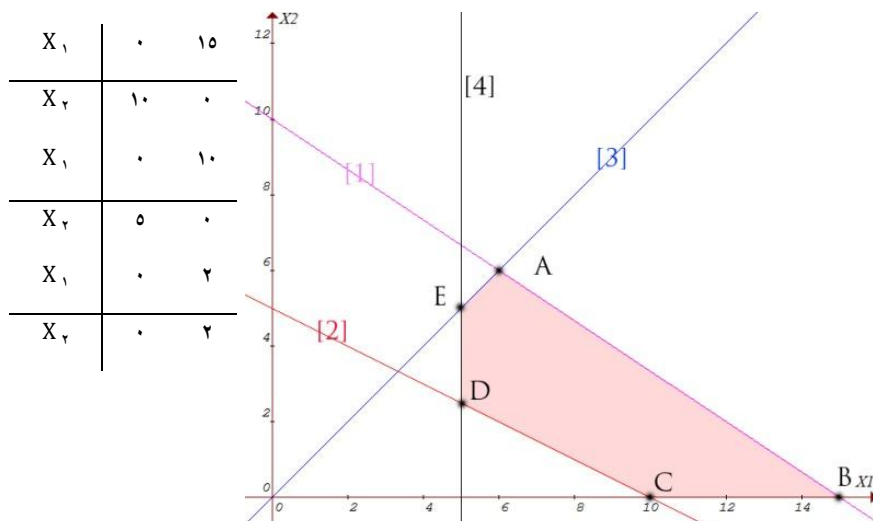
$$\text{S.t.} \quad [1] \quad 2X_1 + 3X_2 \leq 30 \rightarrow 2X_1 + 3X_2 = 30$$

$$[2] \quad X_1 + 2X_2 \geq 10 \rightarrow X_1 + 2X_2 = 10$$

$$[3] \quad X_1 - X_2 \geq 0 \rightarrow X_1 - X_2 = 0$$

$$[4] \quad X_1 \geq 0 \rightarrow X_1 \geq 0$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



الف) مسئله زیر را به روش ترسیمی حل کنید.

ب) ثانویه این مسئله را بنویسید.

ج) متغیرهای ثانویه را که در جواب نهایی دارای مقدار محدودند و جز متغیرهای اساسی هستند، مشخص کنید.

$$\begin{cases} [1] \quad 2X_1 + 3X_2 = 30 \\ [3] \quad X_1 - X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 = 30 \\ 3X_1 - 3X_2 = 0 \end{cases}$$

$$5X_1 = 30 \rightarrow X_1 = 6 \rightarrow X_2 = 6 \Rightarrow A(6, 6) \rightarrow Z_A = 30$$

$$B(15, 0) \rightarrow Z_B = 30, \quad C(10, 0) \rightarrow Z_C = 20, \quad D(0, 5) \rightarrow Z_D^* = 17.5, \quad E(0, 0) \rightarrow Z_E = 0$$

✓ همان طور که مشاهده می شود نقطه D نقطه بهینه می باشد

ب)

$$\text{Min } Z = 2X_1 + 3X_2$$

$$\text{S.t.} \quad 2X_1 + 3X_2 \leq 30$$

$$X_1 + 2X_2 \geq 10 \Rightarrow$$

$$X_1 - X_2 \geq 0$$

$$X_1 \geq 0$$

$$\text{Min } Z = 2X_1 + 3X_2$$

$$-2X_1 - 3X_2 \geq -30$$

$$X_1 + 2X_2 \geq 10$$

$$X_1 - X_2 \geq 0$$

$$X_1 \geq 0$$

$$\text{Max } Y = -30y_1 + 10y_2 + 0y_3$$

$$-2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 2$$

$$\Rightarrow -3y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 3$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

ج)

(۱۵) مسئله زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Max } Z = 8X_1 + 6X_2$$

$$\text{Max } Z = 8X_1 + 6X_2$$

مسئله ثانویه

$$\text{Min } Y_0 = \frac{3}{5}y_1 - 2y_2$$

$$\text{S.t. } X_1 - X_2 \leq \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow X_1 - X_2 \leq \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow y_1 - y_2 \geq 8$$

$$X_1 - X_2 \geq 2$$

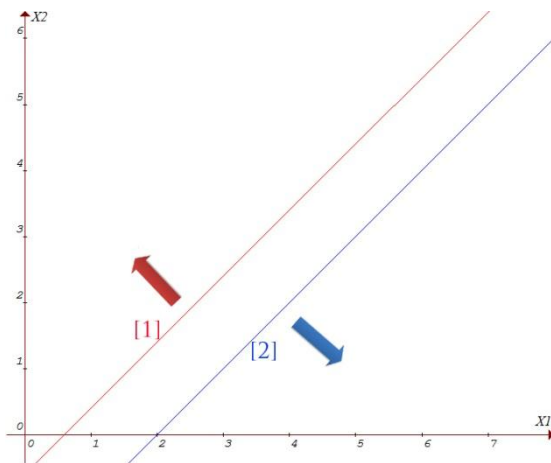
$$-X_1 + X_2 \leq -2$$

$$-y_1 + y_2 \geq 6$$

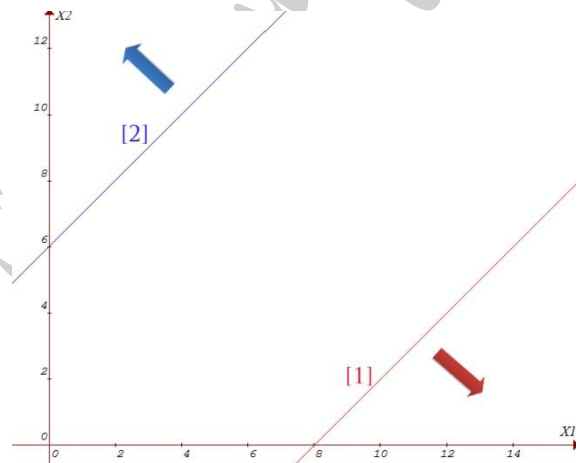
$$X_1, X_2 \geq 0$$

نشان دهید که مسئله مزبور و مسئله ثانویه آن منطقه موجه ندارند و نیز نتیجه بگیرید که ثانویه یک مسئله بدون جواب همواره نمی تواند یک مسئله با منطقه موجه نامحدود باشد.

مسئله اولیه



مسئله ثانویه



✓ همان طور که مشاهده می شود مسئله اولیه و مسئله ثانویه فاقد منطقه جواب می باشد در ضمن همانطور که مشاهده کردید ثانویه یک مسئله بدون جواب همواره نمی تواند یک مسئله با منطقه موجه نامحدود باشد.

(۱۶) مسئله زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2 + 5X_3$$

$$\text{Min } Y_0 = 500y_1 + 460y_2 + 420y_3$$

$$\text{Max } -Y_0 + 500y_1 + 460y_2 + 420y_3 = 0$$

$$\text{S.t. } X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 500$$

$$y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3$$

$$-y_1 - 3y_2 - y_3 + l_1 = -3$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 460$$

$$\Rightarrow$$

$$2y_1 + 4y_2 \geq 2$$

$$\Rightarrow$$

$$-2y_1 - 4y_2 + l_2 = -2$$

$$X_1 + 4X_2 \leq 420$$

$$y_1 + 2y_2 \geq 5$$

$$-y_1 - 2y_2 + l_3 = -5$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

ثانویه این مسئله را بنویسید. پس از تشکیل مسئله ثانویه، آن را به روش M بزرگ یا دو مرحله ای ترجیحا سیمپلکس ثانویه حل کنید. سپس بدون حل مسئله اولیه، جواب های آن را با استفاده از جدول نهایی مسئله ثانویه به دست آورید.

	Y	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$l_1$	$l_2$	$l_3$	R.H.S
Y	-۱	۵۰۰	۴۶۰	۴۲۰	۰	۰	۰	۰
$l_1$	۰	-۱	-۳	-۱	۱	۰	۰	-۳
$l_2$	۰	-۲	۰	-۴	۰	۱	۰	-۲
$l_3$	۰	-۱	-۲	۰	۰	۰	۱	-۵
Y	-۱	۲۷۰	۰	۴۲۰	۰	۰	۲۳۰	-۱۱۵۰
$l_1$	۰	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۱	۰	$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$
$l_2$	۰	-۲	۰	-۴	۰	۱	۰	-۲
$y_2$	۰	$\frac{1}{2}$	۱	۰	۰	۰	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
Y	-۱	۶۰	۰	۰	۰	۱۰۵	۲۳۰	-۱۳۶۰
$l_1$	۰	۱	۰	۰	۱	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{2}$	۵
$y_3$	۰	$\frac{1}{2}$	۰	۱	۰	$-\frac{1}{4}$	۰	$\frac{1}{2}$
$y_2$	۰	$\frac{1}{2}$	۱	۰	۰	۰	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$

مسئله ثانویه

$$Y^* = 1360$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 0 & l_1 &= 5 \\ y_2 &= \frac{5}{2} & l_2 &= 0 \\ y_3 &= \frac{1}{2} & l_3 &= 0 \end{aligned}$$

مسئله اولیه

$$Z^* = 1360$$

$$\begin{aligned} X_1 &= 0 & S_1 &= 60 \\ X_2 &= 105 & S_2 &= 0 \\ X_3 &= 230 & S_3 &= 0 \end{aligned}$$

(۱۷) مسئله زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Max } Z = 2X_1 + X_2 + 5X_3 + 6X_4$$

$$\text{S.t. } 2X_1 + X_2 + X_4 \leq 8$$

$$2X_1 + 2X_2 + X_3 + 2X_4 \leq 12$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

با استفاده از روابط بین توابع هدف مسئله اولیه و ثانویه آن، نشان دهید که و متغیرهای اساسی جدول بهینه را تشکیل می دهند. جواب مسئله ثانویه چیست؟

(۱۸) مسئله زیر را در نظر بگیرید .

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 12X_2 + 4X_3$$

$$\text{Max } Z = 5X_1 - 12X_2 - 4X_3 + MR = 0$$

$$\text{S.t. } X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 5 \Rightarrow X_1 + 2X_2 + X_3 + S_1 = 5$$

$$2X_1 - X_2 + 3X_3 = 2 \quad 2X_1 - X_2 + 3X_3 + R = 2$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

$$X_1, X_2, X_3, S_1, R \geq 0$$

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$S_1$	R	R.H.S
Z	1	-5	-12	-4	0	M	0
$S_1$	0	1	2	1	1	0	5
R	0	2	-1	3	0	1	2
Z	1	-2-5	M-12	-3M-4	0	0	-2M
$S_1$	0	1	2	1	1	0	5
R	0	2	-1	3	0	1	2
Z	1	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{40}{3}$	0	0	$M+\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$
$S_1$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$
$X_3$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Z	1	$-\frac{3}{7}$	0	0	$\frac{40}{7}$	$M-\frac{4}{7}$	$\frac{192}{7}$
$X_2$	0	$\frac{1}{7}$	1	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{13}{7}$
$X_3$	0	$\frac{5}{7}$	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{9}{7}$
Z	1	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{5}$	$M-\frac{2}{5}$	$\frac{141}{5}$
$X_2$	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}$
$X_1$	0	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}$

$$\text{Min } Y_0 = 5y_1 + 2y_2$$

$$\text{S.t. } y_1 + 2y_2 \geq 5$$

$$2y_1 - y_2 \geq 12$$

$$y_1 + 3y_2 \geq 4$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \text{ آزاد در علامت}$$

این مسئله و ثانویه آن را به روش سیمپلکس حل و نتایج را با هم مقایسه کنید.  
(۱۹) مسئله زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Min } Z = 10X_1 + 5X_2 + 4X_3$$

$$\text{Max } -Z + 10X_1 + 5X_2 + 4X_3 = 0$$

$$\text{Max } -Z + 10X_1 + 5X_2 + 4X_3 = 0$$

$$\text{S.t. } 3X_1 + 2X_2 - 3X_3 \geq 3 \Rightarrow$$

$$-3X_1 - 2X_2 + 3X_3 \leq -3$$

$$\Rightarrow -3X_1 - 2X_2 + 3X_3 + S_1 = -3$$

$$4X_1 + 2X_2 \geq 10$$

$$-4X_1 - 2X_2 \leq -10$$

$$-4X_1 - 2X_2 + S_2 = -10$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2 \geq 0$$

الف) مسئله را به روش سیمپلکس ثانویه حل کنید.

ب) ثانویه این مسئله را به روش سیمپلکس حل کنید.

ج) عملیات بند الف و ب را مقایسه کنید

	Z	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$S_1$	$S_2$	R.H.S
Z	-1	10	5	4	0	0	0
$S_1$	0	-3	-2	3	1	0	-3
$S_2$	0	-4	0	-2	0	1	-10
Z	-1	2	5	0	0	2	-20
$S_1$	0	-9	-2	0	1	$\frac{3}{2}$	-18
$X_3$	0	2	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	5
Z	-1	0	$\frac{41}{9}$	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{3}$	-24
$X_1$	0	1	$\frac{2}{9}$	0	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{6}$	2
$X_3$	0	0	$-\frac{4}{9}$	1	$\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{6}$	1

$$\text{Min } Z = 10X_1 + 5X_2 + 4X_3$$

$$\text{Max } Y_1 = 3y_1 + 10y_2$$

$$\text{Max } Y_1 = 3y_1 + 10y_2$$

$$\text{S.t. } 3X_1 + 2X_2 - 3X_3 \geq 3 \Rightarrow$$

$$3y_1 + 4y_2 \leq 10$$

$$\Rightarrow 3y_1 + 4y_2 + S_1 = 10$$

$$4X_1 + 2X_2 \geq 10$$

$$2y_1 \leq 5$$

$$2y_1 + S_2 = 5$$

$$-3y_1 + 2y_2 \leq 4$$

$$-3y_1 + 2y_2 + S_3 = 4$$

	Z	$y_1$	$y_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	R.H.S
Z	۱	-۳	-۱۰	۰	۰	۰	۰
$S_1$	۰	۳	۴	۱	۰	۰	۱۰
$S_2$	۰	۲	۰	۰	۱	۰	۵
$S_3$	۰	-۳	۲	۰	۰	۱	۴
Z	۱	-۱۸	۰	۰	۰	۵	۲۰
$S_1$	۰	۹	۰	۱	۰	-۲	۲
$S_2$	۰	۲	۰	۰	۱	۰	۵
$y_2$	۰	$-\frac{3}{2}$	۱	۰	۰	$\frac{1}{2}$	۲
Z	۱	۰	۰	۲	۰	۱	۲۴
$y_1$	۰	۱	۰	$\frac{1}{9}$	۰	$-\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$
$S_2$	۰	۰	۰	$-\frac{2}{9}$	۱	$\frac{4}{9}$	$\frac{41}{9}$
$y_2$	۰	۰	۱	$\frac{1}{6}$	۰	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{3}$

✓ ج) با مقایسه بند الف و ب در می یابیم که روش سیمپلکس ثانویه مسئله را به گونه ای حل می کند که گویی ثانویه آن مسئله را به طریق سیمپلکس حل می کند.

(۲۰) مسئله زیر را به روش سیمپلکس ثانویه حل کنید .

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= 2X_1 + X_2 & \text{Max } -Z + 2X_1 + X_2 &= 0 \\ \text{S.t. } & 3X_1 + X_2 \geq 3 & -3X_1 - X_2 + S_1 &= -3 \\ & 4X_1 + 3X_2 \geq 6 & \Rightarrow -4X_1 - 3X_2 + S_2 &= -6 \\ & X_1 + 2X_2 \leq 3 & X_1 + 2X_2 + S_3 &= 3 \\ & X_1, X_2 \geq 0 & X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	R.H.S
Z	-۱	۲	۱	۰	۰	۰	۰
$S_1$	۰	-۳	-۱	۱	۰	۰	-۳
$S_2$	۰	-۴	-۳	۰	۱	۰	-۶
$S_3$	۰	۱	۲	۰	۰	۱	۳

Z	-۱	$\frac{2}{3}$	۰	۰	$\frac{1}{3}$	۰	-۲
S <sub>۱</sub>	۰	$-\frac{5}{3}$	۰	۱	$-\frac{1}{3}$	۰	-۱
X <sub>۲</sub>	۰	$\frac{4}{3}$	۱	۰	$-\frac{1}{3}$	۰	۲
S <sub>۳</sub>	۰	$-\frac{5}{3}$	۰	۰	$\frac{2}{3}$	۱	-۱
Z	-۱	۰	۰	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	۰	$-\frac{12}{5}$
X <sub>۱</sub>	۰	۱	۰	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	۰	$\frac{3}{5}$
X <sub>۲</sub>	۰	۰	۱	$\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{5}$	۰	$\frac{1}{5}$
S <sub>۳</sub>	۰	۰	۰	-۱	۱	۱	۰

$$\Rightarrow Z^* = \frac{12}{5}, \quad X_1 = \frac{3}{5}, \quad X_2 = \frac{1}{5}$$



(۲۱) مسئله زیر را به روش سیمپلکس ثانویه حل کنید .

$$\text{Max } Z = -2X_1 - 2X_2$$

$$\text{Max } Z = -2X_1 - 2X_2$$

$$\text{Max } Z + 2X_1 + 2X_2 = 0$$

$$\text{S.t. } 2X_1 + X_2 \geq 6$$

$$\Rightarrow -2X_1 - X_2 \leq -6$$

$$\Rightarrow -2X_1 - X_2 + S_1 = -6$$

$$X_1 + 2X_2 \geq 6$$

$$-X_1 - 2X_2 \leq -6$$

$$-X_1 - 2X_2 + S_2 = -6$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

	Z	$X_1$	$X_2$	$S_1$	$S_2$	R.H.S
Z	1	2	2	0	0	0
$S_1$	0	-2	-1	1	0	-6
$S_2$	0	-1	-2	0	1	-6
Z	1	0	1	1	0	-6
$X_1$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	3
$S_2$	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	-3
Z	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	-8
$x_1$	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
$X_2$	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	2
$\Rightarrow Z^* = -8, \quad X_1 = 2, \quad X_2 = 2$						